1. Probabilidad condicional e independencia de eventos

<u>Definición</u>: La probabilidad condicional de un evento A, suponiendo que ocurrió el evento B es igual a

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

<u>Definición</u>: Se dice que dos eventos A y B son independientes si cumplen con cualquiera de las siguientes condiciones:

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$
$$P(A \cup B) = P(A)P(B)$$

si no se cumplen, se dice que los eventos son dependientes.

<u>Ejemplo</u>. Un sondeo de consumidores en una comunidad reveló que 10 % de ellos no estaban satisfechos con los trabajos de plomería que se realizaron. La mitad de las quejas se relacionaban con el plomero A, quien realizó el 40 % de los trabajos de plomería de la ciudad. ¿Qué probabilidad hay de que un consumidor reciba un servicio insatisfactorio dado que el plomero que lo realiza es A?

<u>Solución</u>.
Supongamos que B es el evento que no sea A el plomero. Supongamos que S es el evento çliente satisfecho". Por el enunciado sabemos que $P(\bar{S}) = 0{,}1$. También nos dicen que la mitad de las quejas estaban asociadas con A, es decir $P(\bar{S} \cap A) = 0{,}05$. Por otro lado $P(A) = 0{,}4$. Queremos buscar $P(\bar{S}|A)$.

Usando la definición de probabilidad condicional tenemos:

$$P(\bar{S}|A) = \frac{P(\bar{S} \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}05}{0{,}4} = 1/8$$

2. Dos leyes de la probabilidad

<u>Teorema</u>: Ley multiplicativa de la probabilidad. La probabilidad de la intersección de dos eventos A y B es

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Si A y B son independientes, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

<u>Teorema</u>: Ley aditiva de la probabilidad. La probabilidad de la unión de los eventos A y B es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si A y B son eventos mutuamente excluyentes, $P(A \cap B) = 0$ y

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

<u>Teorema</u>: Si A es un evento, entonces

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

<u>Ejemplo</u>. En cierta población hay dos enfermedades I y II. Se supone que 10 % de la población contraerá la enfermedad I, el 15 % la enfermedad II y un 3 % ambas enfermedades. Encuentre la probabilidad de que una persona al azar contraiga al menos una de las enfermedades. Encuentre la probabilidad de que una persona al azar que haya tenido la enfermedad I, contraiga la enfermedad II.

<u>Solución</u>.
Supongamos que A es el evento enfermedad I y que B es el evento enfermedad II. Como datos tenemos que $P(A) = 0{,}1$, $P(B) = 0{,}15$ y $P(A \cap B) = 0{,}03$. La probabilidad de que una persona contraiga al menos una enfermedad es que se cumpla el evento A o el evento B, por lo tanto estamos buscando $P(A \cup B)$. Por otro lado, la probabilidad de que alguien que se recupere de I contraiga II, es $P(B|A)$.

Por ley aditiva

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}1 + 0{,}15 - 0{,}03 = 0{,}22.$$

Mientras que por definición de probabilidad condicional

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}03}{0{,}1} = 3/10.$$